Міністерство освіти і науки України
Кафедра інформаційних технологій та прикладної математики

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з дисципліни: «Економіко математичні методи та моделі»

Виконав(ла):

Перевірив:

Одеса – 2023

Зміст

Завдання 1. Лінійне програмування

1. Визначити, яка із задач належить до першого стандартного типу задачі ЛП:

№1	№2	№3
$L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + 4x_2 \le 16,$ $-4x_1 + 2x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Відповідь: до першого стандартного типу задачі ЛП належить задача №1, тому що цільова функція задачі прямує до максимуму, всі функціональні обмеження мають знак нерівності менше, всі числа в правих частинах функціональних обмежень невід'ємні, всі змінні невід'ємні.

2. Визначити, яка із задач належить до другого стандартного типу задачі ЛП:

№1	№2	№3
$L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $7x_1 + 1x_2 \le 16,$ $-4x_1 + x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $15x_1 + 2x_2 \ge 8,$ $x_1 + 2x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $5x_1 + 2x_2 \ge 7,$ $x_1 + 4x_2 \ge 2,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Відповідь: до другого стандартного типу задачі ЛП належить задача №2, тому що цільова функція задачі прямує до мінімуму, всі функціональні обмеження мають знак нерівності більше, всі числа в правих частинах функціональних обмежень невід'ємні, всі змінні невід'ємні.

3. Визначити, яка із задача ЛП записана в канонічній формі:

№1	№2	№3
$L(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + 1x_2 \le 6,$ $-4x_1 + x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $5x_1 + x_2 \ge 8,$ $3x_1 + x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $5x_1 + 2x_2 = 7,$ $x_1 + 4x_2 = 2,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Відповідь: в канонічній формі записана задача ЛП №3, тому що всі функціональні обмеження – рівняння, всі числа в правих частинах функціональних обмежень невід'ємні, всі змінні невід'ємні.

4. Записати наступні задачі ЛП в канонічній формі:

$L(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + 1x_2 \le 6,$ $-4x_1 + x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $5x_1 + x_2 \ge 8,$ $3x_1 + x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $5x_1 + 2x_2 \le 7,$ $x_1 + 4x_2 \le 2,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
Канонічна форма:		
$L(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + 1x_2 + x_3 = 6,$ $-4x_1 + x_2 + x_4 = 3,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$ $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $5x_1 + x_2 - x_3 = 8,$ $3x_1 + x_2 - x_4 = 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$ $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$ $x_1 + 4x_2 + x_4 = 2,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$ $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

5. Записати задачі ЛП в матричній формі:

$L(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$ $2x_1 + 4x_2 \le 16,$ $-4x_1 + 2x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow min$ $x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$L(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow min$ $3x_1 + 2x_2 = 6,$ $x_1 + 4x_2 = 4,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
Матрична форма запису:		
$L(x) = CX \rightarrow max$ $AX \le B$ $C = (2; 1)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ $X \ge 0$	$L(x) = CX \rightarrow min$ $AX \ge B$ $C = (2; 3)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $X \ge 0$	$L(x) = CX \rightarrow min$ $AX = B$ $C = (2; 3)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $X \ge 0$

6. Розв’язати задачі ЛП графічним методом:

5.1	5.2	5.3
$L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ $5x_1 - 2x_2 \le 4,$ $x_1 - 2x_2 \ge -4,$ $x_1 + x_2 \ge 4,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$L(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow min$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$L(X) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow min$ $3x_1 + 5x_2 \le 10,$ $5x_1 + 2x_2 \le 10,$ $x_1, x_2 \ge 0$
5.4	5.5	5.6
$L(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6,$ $x_1 + x_2 \ge 1,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$L(X) = x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $-x_1 + x_2 \le 3,$ $4x_1 + 3x_2 \le 20,$ $x_1, x_2 \ge 0$	$L(X) = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow max$ $5x_1 - 2x_2 \le 4,$ $x_1 - 2x_2 \ge -4,$ $x_1 + x_2 \ge 4,$ $x_1, x_2 \ge 0$

Розв’язання.

5.1.

Побудуємо рівняння 5x1-2x2 = 4 за двома точками:

x1 = 0, x2 = -2.

x2 = 0, x1 = 0.8.

З'єднуємо точку (0; -2) з (0.8; 0) прямою лінією.

Визначимо напівплощину, що задається нерівністю. Вибравши точку (0; 0), визначимо знак нерівності: 5 * 0 - 2 * 0 - 4 ≤ 0, тобто. 5x1-2x2 - 4≤ 0 у напівплощині нижче прямої.

Побудуємо рівняння x1-2x2 = -4:

x1 = 0, x2 = 2.

x2 = 0, x1 = -4.

З'єднуємо точку (0; 2) з (-4; 0) прямою лінією.

Визначимо напівплощину: 1 * 0 - 2 * 0 + 4 ≥ 0, тобто. x1-2x2 + 4≥ 0 у напівплощині нижче прямої.

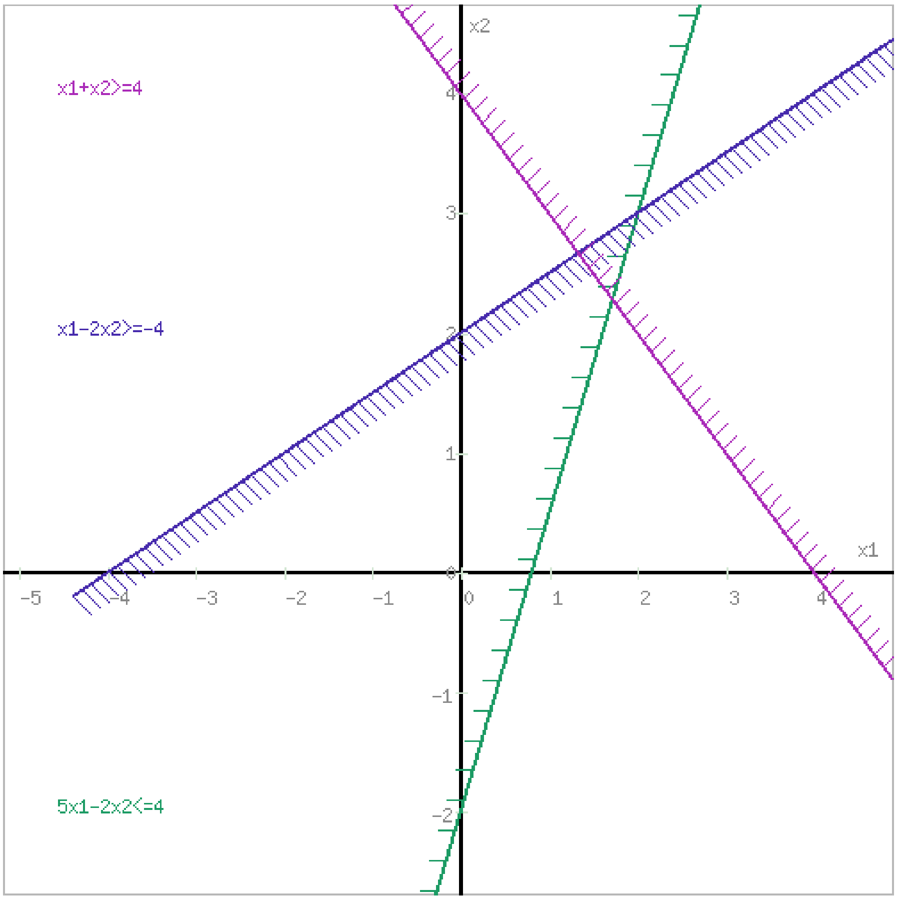
Побудуємо рівняння x1+x2 = 4:

x1 = 0, x2 = 4.

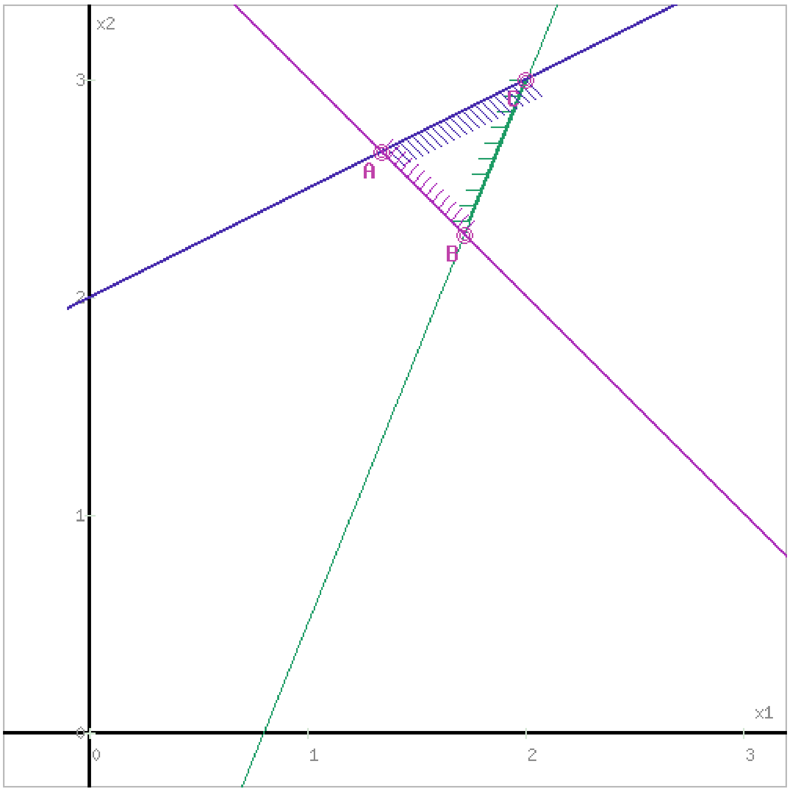
x2 = 0, x1 = 4.

З'єднуємо точку (0; 4) з (4; 0) прямою лінією.

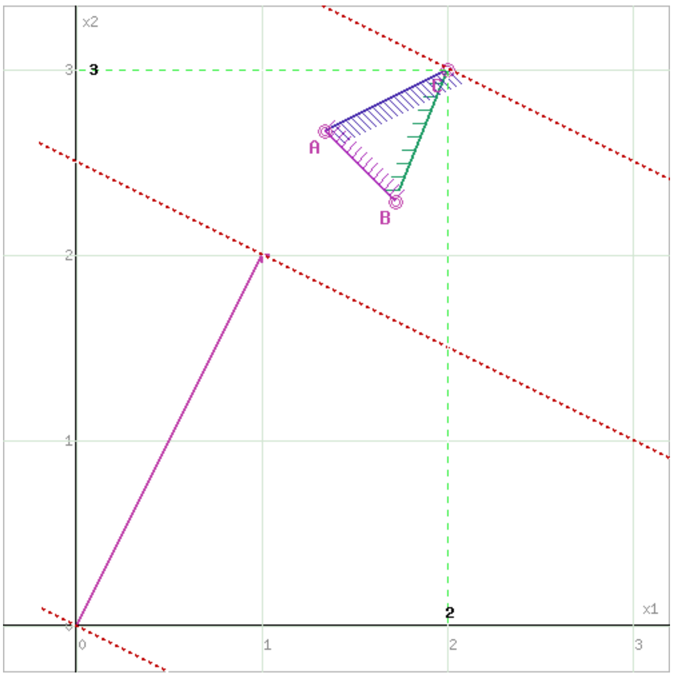
Визначимо напівплощину: 1 * 0 + 1 * 0 - 4 ≤ 0, тобто. x1+x2 - 4≥ 0 у напівплощині вище прямої.



Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = x1+2x2 = 0. Вектор-градієнт, складений з коефіцієнтів цільової функції, вказує напрямок максимізації F(X). Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (1; 2). Рухатимемо цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить максимальне рішення, то рухаємо пряму до останнього дотику зазначеної області. На графіці ця пряма позначена пунктирною лінією.



Пряма F(x) = const перетинає область у точці С. Так як точка С отримана в результаті перетину прямих (1) та (2), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

$5x_1$-$2x_2$ = 4

x_1-$2x_2$ = -4

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: x_1 = 2, x_2 = 3

Звідки знайдемо максимальне значення цільової функції:

F(x) = 1*2 + 2*3 = 8

5.2.

3x1+2x2 = 6

x1 = 0, x2 = 3.

x2 = 0, x1 = 2.

З'єднуємо точку (0; 3) з (2; 0) прямою лінією.

Визначимо знак нерівності: 3 * 0 + 2 * 0 - 6 ≤ 0, тобто. 3x1+2x2 - 6≥ 0 у напівплощині вище прямої.

x1+4x2 = 4:

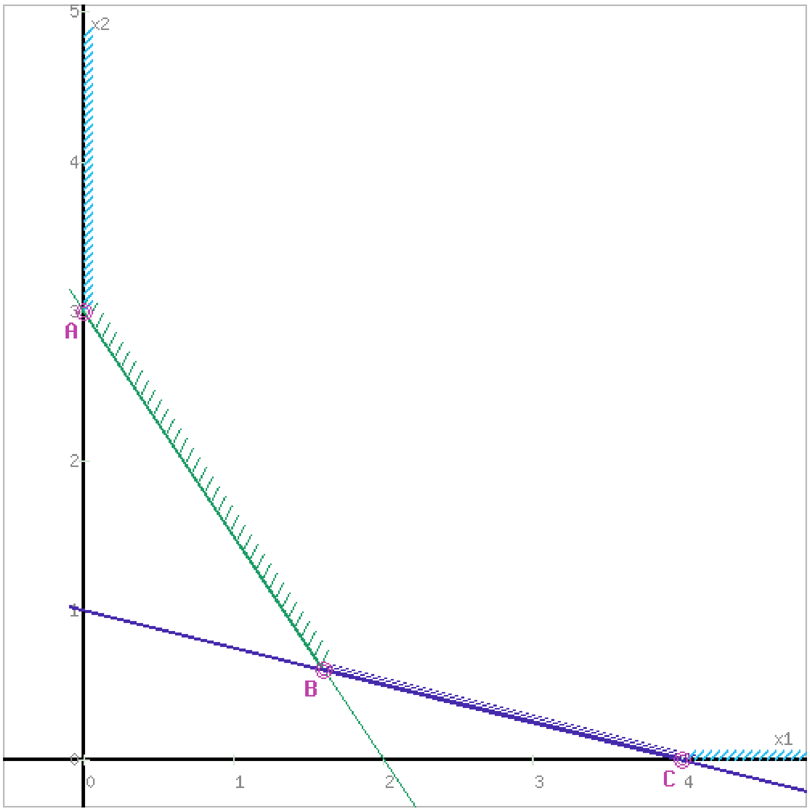
x1 = 0, x2 = 1.

x2 = 0, x1 = 4.

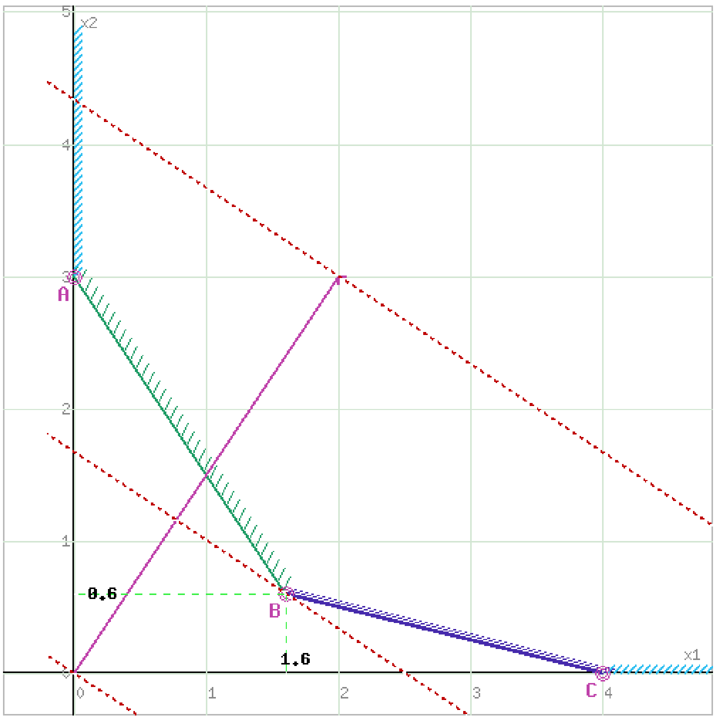
З'єднуємо точку (0; 1) з (4; 0) прямою лінією.

Визначимо знак нерівності: 1 * 0 + 4 * 0 - 4 ≤ 0, тобто. x1+4x2 - 4≥ 0 у напівплощині вище прямої.

Перетином напівплощин буде область, координати точок якого задовольняють умові нерівностей системи обмежень задачі. Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = 2x1+3x2 = 0. Вектор-градієнт, складений з коефіцієнтів цільової функції, вказує напрямок максимізації F(X). Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (2; 3). Рухатимемо цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить мінімальне рішення, то рухаємо пряму до першого торкання зазначеної області. На графіці ця пряма позначена пунктирною лінією.



Пряма F(x) = const перетинає область у точці B. Оскільки точка B отримана в результаті перетину прямих (1) та (2), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

$3x_1 + 2x_2 = 6$

$x_1 + 4x_2 = 4$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.6$

Звідки знайдемо мінімальне значення цільової функції:

F(x) = 2*1.6 + 3*0.6 = 5

5.3.

3x1+5x2 = 10: з

x1 = 0, 2 = 2. Д

x2 = 0, x1 = 3.33.

З'єднуємо точку (0; 2) з (3.33; 0) прямою лінією.

3 * 0 + 5 * 0 - 10 ≤ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

5x1+2x2 = 10: з

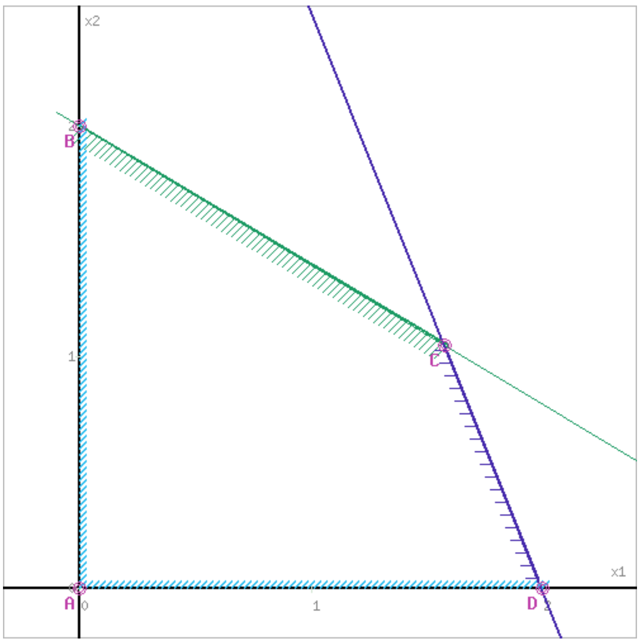
x1 = 0, x2 = 5.

x2 = 0, x1 = 2.

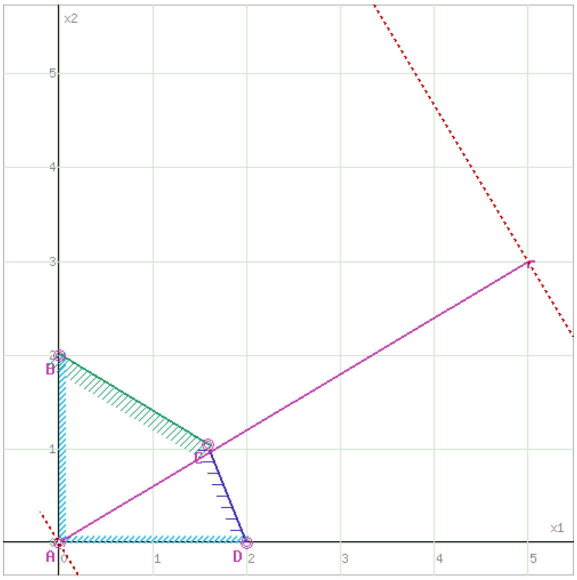
З'єднуємо точку (0; 5) з (2; 0) прямою лінією.

(0; 0): 5 * 0 + 2 * 0 - 10 ≤ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = 5x1+3x2 = 0. Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (5; 3).



Пряма F(x) = const перетинає область у точці A. Оскільки точка A отримана в результаті перетину прямих (3) і (4), її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

x1 = 0

x2 = 0

Звідки знайдемо мінімальне значення цільової функції:

F(x) = 5*0 + 3*0 = 0

5.4.

3x1+2x2 = 6:

x1 = 0 x2 = 3.

x2 = 0 x1 = 2.

З'єднуємо точку (0; 3) з (2; 0) прямою лінією.

(0; 0): 3 * 0 + 2 * 0 - 6 ≤ 0, тобто у напівплощині вище прямої.

x1+x2 = 1

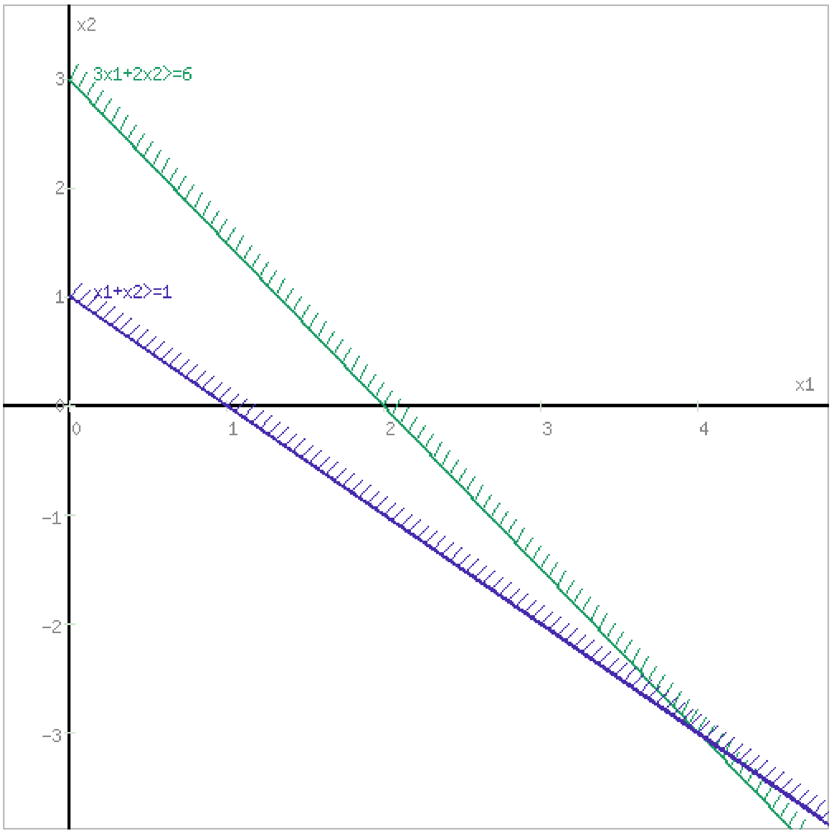
x1 = 0 x2 = 1.

x2 = 0 x1 = 1.

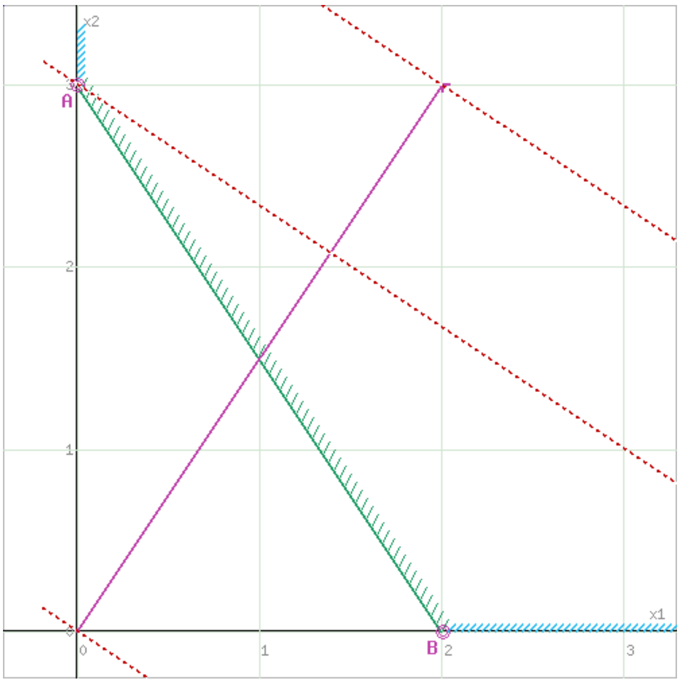
З'єднуємо точку (0; 1) з (1; 0) прямою лінією.

(0; 0): 1 * 0 + 1 * 0 - 1 ≤ 0, тобто у напівплощині вище прямої.

Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = 2x1+3x2 = 0. Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (2; 3). Рухатимемо цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить максимальне рішення, то рухаємо пряму до останнього дотику зазначеної області.



Завдання немає допустимих рішень. ОДР є безліч (не обмежена).

5.5.

-x1+x2 = 3 з

x1 = 0 x2 = 3.

x2 = 0 x1 = -3.

З'єднуємо точку (0; 3) з (-3; 0) прямою лінією.

(0; 0)і: -1 * 0 + 1 * 0 - 3 ≤ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

4x1+3x2 = 20

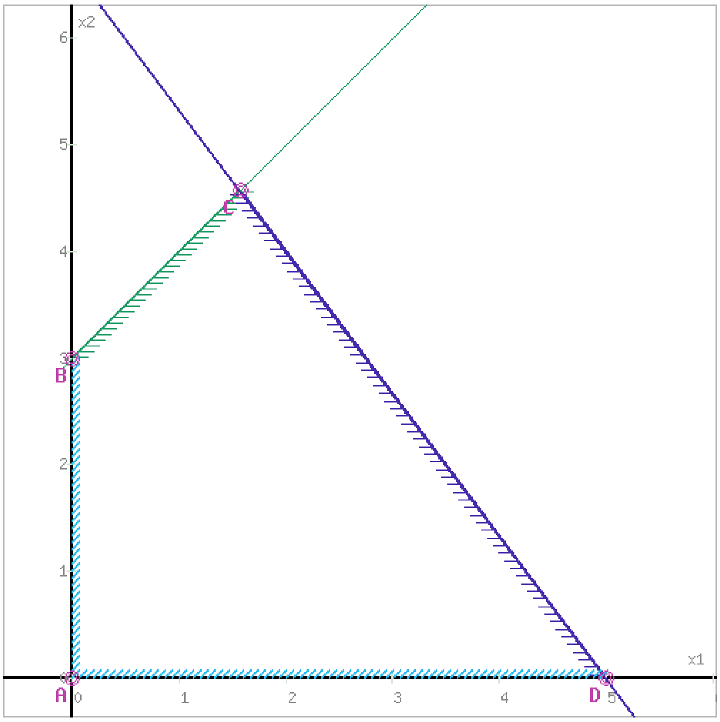
x1 = 0 x2 = 6.67.

x2 = 0 x1 = 5.

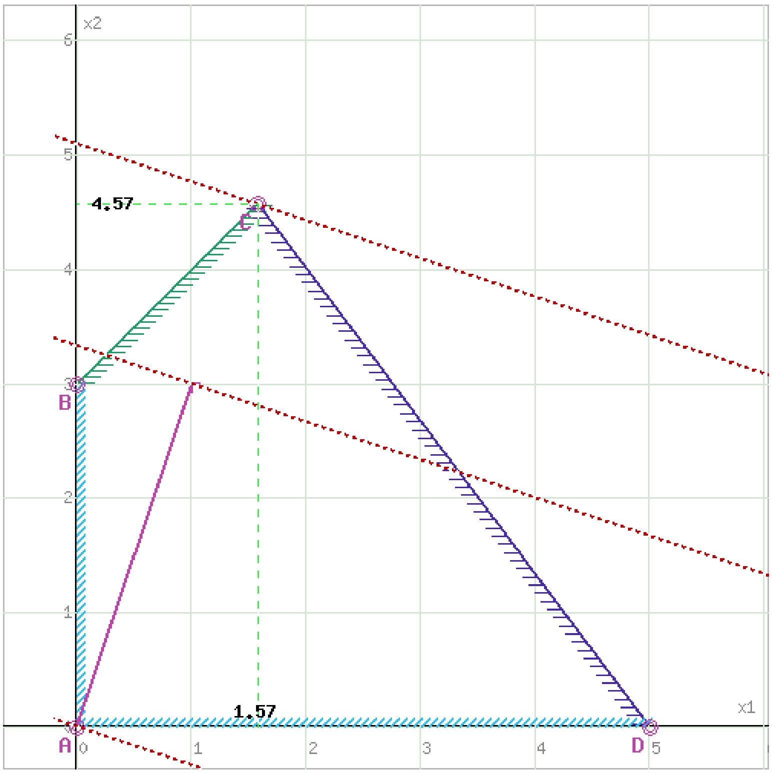
З'єднуємо точку (0; 6.67) з (5; 0) прямою лінією.

(0; 0): 4 * 0 + 3 * 0 - 20 ≤ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = x1 + 3x2 = 0. Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (1; 3). Рухатимемо цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить максимальне рішення, то рухаємо пряму до останнього дотику зазначеної області. На графіці ця пряма позначена пунктирною лінією.



Пряма F(x) = const перетинає область у точці C. Так як точка C отримана в результаті перетину прямих (1) та (2), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

-x1+x2=3

4x1+3x2=20

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: x1 = 1.5714, x2 = 4.5714

F(x) = 1 * 1.5714 + 3 * 4.5714 = 15.2857

5.6.

5x1-2x2 = 4

x1 = 0 x2 = -2.

x2 = 0 x1 = 0.8.

З'єднуємо точку (0; -2) з (0.8; 0) прямою лінією.

(0; 0): 5 * 0 - 2 * 0 - 4 ≤ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

x1-2x2 = -4

x1 = 0 x2 = 2.

x2 = 0 x1 = -4.

З'єднуємо точку (0; 2) з (-4; 0) прямою лінією.

(0; 0): 1 * 0 - 2 * 0 + 4 ≥ 0, тобто у напівплощині нижче прямої.

x1+x2 = 4

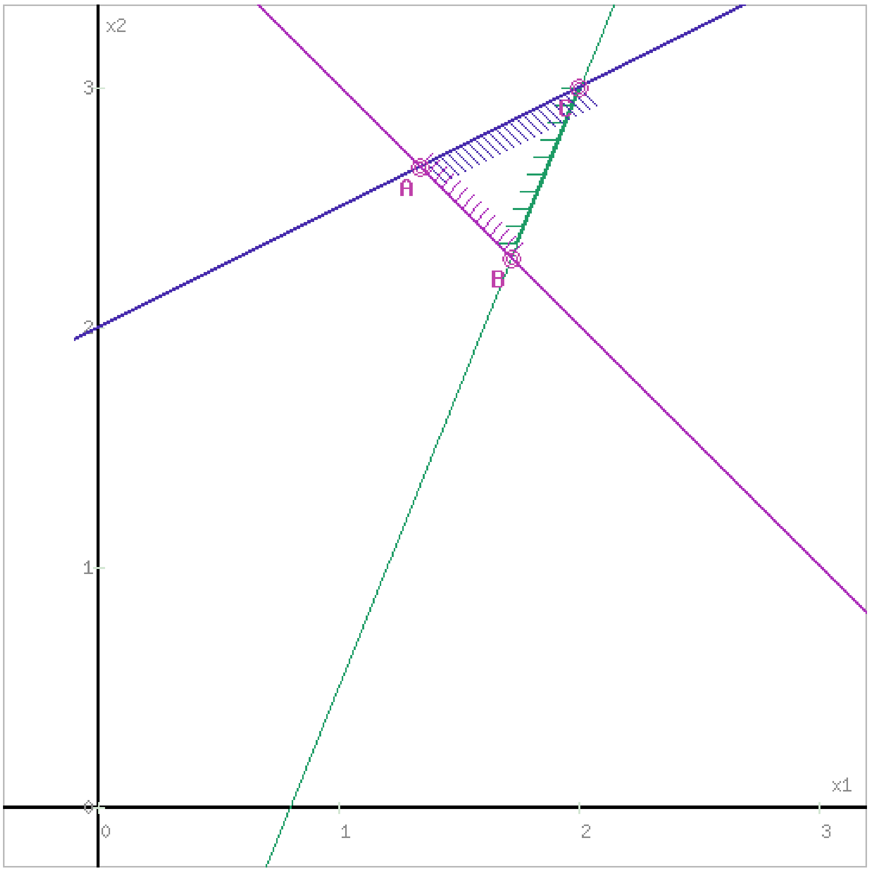
x1 = 0 x2 = 4.

x2 = 0 x1 = 4.

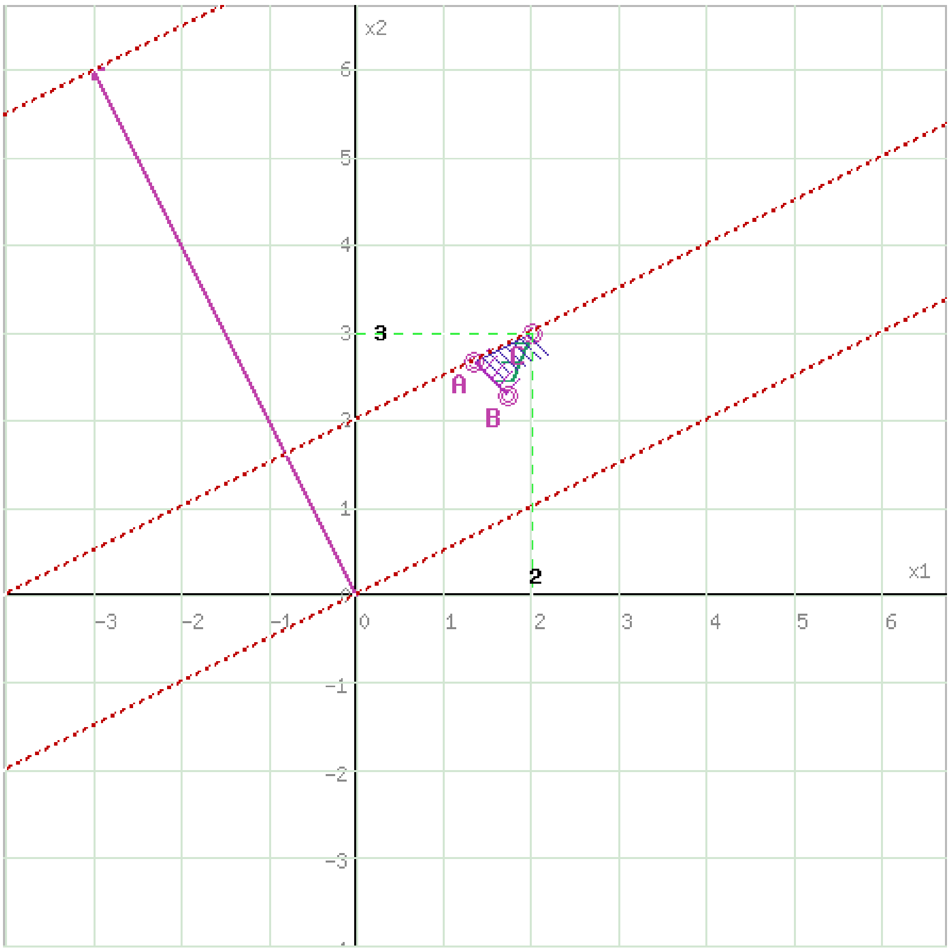
З'єднуємо точку (0; 4) з (4; 0) прямою лінією.

(0; 0): 1 * 0 + 1 * 0 - 4 ≤ 0, тобто у напівплощині вище прямої.

Позначимо межі області багатокутника розв'язків.



Побудуємо пряму, що відповідає значенню функції F = -3x1+6x2 = 0. Вектор-градієнт, складений з коефіцієнтів цільової функції, вказує напрямок максимізації F(X). Початок вектора – точка (0; 0), кінець – точка (-3; 6). Рухатимемо цю пряму паралельним чином. Оскільки нас цікавить максимальне рішення, то рухаємо пряму до останнього дотику зазначеної області. На графіці ця пряма позначена пунктирною лінією.



Пряма F(x) = const перетинає область у точці C. Так як точка C отримана в результаті перетину прямих (1) та (2), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

5x1-2x2=4

x1-2x2=-4

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: x1 = 2, x2 = 3

F(x) = -3 * 2 + 6 * 3 = 12

Оскільки функція мети F(x) паралельна прямій (2), то на відрізку CA функція F(x) буде приймати одне й те саме максимальне значення.

Для визначення координат точки A розв'яжемо систему двох лінійних рівнянь:

x1-2x2=-4

x1+x2=4

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: x1 = 1.3333, x2 = 2.6667

F(x) = -3 * 1.3333 + 6 * 2.6667 = 12

Завдання 2. Класичні лінійні економіко-математичні моделі

1. Задана задача оптимального планування з наступною матрицею норм витрат A, вектором питомих прибутків C і вектором ресурсів B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C = (5;6),\ B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Потрібно знайти оптимальний план, максимальний прибуток, залишки ресурсів.

Розв'язання:

Складемо математичну модель задачі:

$F(x) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$2x_1 + 3x_2 \le 12$

$6x_1 + 3x_2 \le 24$

$x_1, x_2 \ge 0$

Розв'яжемо задачу в ЕКСЕЛЬ з використанням функції Пошук рішень на вкладці дані. Отримаємо,

1

$F(x) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$2x_1 + 3x_2 \le 12$

$6x_1 + 3x_2 \le 24$

$x_1, x_2 \ge 0$

Назва	x1	x2			
Значення	3	2			
Нижні границі	0	0	ЦФ		
			Значення	Направлення	
Коефіцієнт ЦФ	5	6	27,0	max	
Вид			Ліва частина	Знак	Права частина
Обмеження 1	2	1	8	<=	10
Обмеження 2	2	3	12	<=	12
Обмеження 3	6	3	24	<=	24

оптимальний план: X1 = 3, X2 = 2

Максимальний прибуток = 27

Залишки ресурсів: ресурс B1 = 10-8 = 2 од., ресурси B2 та B3 використані повністю.

2. Є два види корма I і II, які містять поживні речовини (вітаміни) S_1, S_2, і S_3. Склад числа одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корма, вартість 1 кг кожного виду корма і необхідний денний мінімум поживних речовин, наведені в наступній таблиці:

Таблиця

Поживні речовини	Число одиниць поживних речовин в 1 кг корма		Необхідний мінімум поживних речовин
	I	II	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Вартість 1 кг корма (гривні)	4	6	

Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальну вартість, і в якому вміст кожного виду поживних речовин була б не менше встановленої норми.

Розв'язання:

Складемо математичну модель задачі:

$F(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$

$3x_1 + 1x_2 \geq 9$

$1x_1 + 2x_2 \geq 8$

$1x_1 + 6x_2 \geq 1\,2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Розв'яжемо задачу в ЕКСЕЛЬ з використанням функції Пошук рішень на вкладці дані. Отримаємо, 2

$$F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$
$$3x_1 + 1x_2 \geq 9$$
$$1x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$1x_1 + 6x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Назва	x1	x2			
Значення	2	3			
Нижні границі	0	0	ЦФ		
			Значення	Направлення	
Коефіцієнт ЦФ	4	6	26,0	max	

Вид			Ліва частина	Знак	Права частина
Обмеження 1	3	1	9	>=	9
Обмеження 2	1	2	8	>=	8
Обмеження 3	1	6	20	>=	12

Денний раціон: Корм I - 2 кг, корм II - 3 кг.

Мінімальна вартість становитиме 26 грн., при цьому вміст поживної речовини S1 рівна 9, S2 рівна 8,S1 рівна 20.

3. На будівництво чотирьох об'єктів цегла поступає з трьох заводів. Заводи мають на складах відповідно 50, 100 і 50 тисяч штук цегли. Об'єкти потребують відповідно 50,70,40,40 тисяч штук цегли. Тарифи (в грошових одиницях за тисячу штук) на перевезення цегли з заводів на об'єкти задані матрицею тарифів:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Потрібно скласти економіко-математичну модель даної задачі за критерієм мінімуму сумарних транспортних витрат.

Розв’язання:

Позначимо x_{ij} кількість перевезення цегли на об'єкт. Оскільки в матриці задані тарифи на перевезення, то цільова функція мінімізації вартості матиме вигляд:

$$F(x) = 2x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 5x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 7x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 8x_{34} \rightarrow \min$$

Складемо обмеження, обумовлені запасом на складах:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 50$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 50$

Складемо обмеження, обумовлені потребами об'єктів:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$

$X_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$

$X_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$

$X_{14} + x_{24} + x_{34} = 40$

За змістом задачі змінні xi не можуть виражатися невід’ємними числами.

умови невід’ємності змінних $xij \geq 0$

Таким чином, модель задачі формулюється так:

$$F(x) = 2x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 5x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 7x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 8x_{34} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \\ X_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ X_{13} + x_{23} + x_{33} = 40 \\ X_{14} + x_{24} + x_{34} = 40 \\ xij \geq 0 \end{cases}$$

Завдання 3. Теорія ігор

1.Відділ маркетингу підприємства повинен прийняти оптимальне управлінське рішення і визначити найбільш вигідний асортимент випуску чотирьох товарів. Всього розроблено 6 варіантів асортименту з урахуванням змінної кон'юнктури ринку і попиту покупців. Отримані від можливих поєднань показники доходів представлені в таблиці.

Асортимент	Величина доходу, гр. од.				
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$	$К_5$
$А_1$	10	8	4	9	7
$А_2$	6	10	9	11	8
$А_3$	6	9	10	10	5
$А_4$	7	11	8	2	8
$А_5$	9	14	11	13	7
$А_6$	12	11	10	7	14

$$A1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \\ 25 \\ 17 \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} 23 \\ 20 \\ 27 \\ 31 \end{pmatrix}, A3 = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}, A4 = \begin{pmatrix} 31 \\ 20 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}, A5 = \begin{pmatrix} 19 \\ 22 \\ 22 \\ 19 \end{pmatrix}, A6 = \begin{pmatrix} 19 \\ 23 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Кількість товару визначити до цілого числа.

Розв'язання:

Для визначення оптимальної стратегії використаємо декілька критеріїв:

Критерій максимаксу орієнтує статистику найсприятливіші стану природи, тобто. цей критерій висловлює оптимістичну оцінку ситуації.

max(aij) = (10; 11; 10; 11; 14; 14)

Max = 14

Висновок: вибираємо стратегію A5.

Критерій Вальд.

За критерієм Вальда за оптимальну приймається чиста стратегія, що у найгірших умовах гарантує максимальний виграш, тобто.

a = max(min aij)

Критерій Вальда орієнтує статистику на несприятливі стану природи, тобто. цей критерій висловлює песимістичну оцінку ситуації.

min(aij)= (4; 6; 5; 2; 7; 7)

max=7

Висновок: вибираємо стратегію A5.

Критерій Севіджа.

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати ролі оптимальної стратегії ту, коли він величина максимального ризику мінімізується в найгірших умовах, тобто. забезпечується:

a = min(max rij)

Критерій Севіджа орієнтує статистику найнесприятливіші стану природи, тобто. цей критерій висловлює песимістичну оцінку ситуації.

Знаходимо матрицю ризиків.

Ризик – міра невідповідності між різними можливими результатами ухвалення певних стратегій. Максимальний виграш у j-му стовпці bj = max(aij) характеризує сприятливість стану природи.

Розраховуємо матрицю ризиків.

r11 = 12 - 10 = 2; r21 = 12 - 6 = 6; r31 = 12 - 6 = 6; r41 = 12 - 7 = 5; r51 = 12 - 9 = 3; r61 = 12 - 12 = 0;

r12 = 14 - 8 = 6; r22 = 14 - 10 = 4; r32 = 14 - 9 = 5; r42 = 14 - 11 = 3; r52 = 14 - 14 = 0; r62 = 14 - 11 = 3;

r13 = 11 - 4 = 7; r23 = 11 - 9 = 2; r33 = 11 - 10 = 1; r43 = 11 - 8 = 3; r53 = 11 - 11 = 0; r63 = 11 - 10 = 1;

r14 = 13 - 9 = 4; r24 = 13 - 11 = 2; r34 = 13 - 10 = 3; r44 = 13 - 2 = 11; r54 = 13 - 13 = 0; r64 = 13 - 7 = 6;

r15 = 14 - 7 = 7; r25 = 14 - 8 = 6; r35 = 14 - 5 = 9; r45 = 14 - 8 = 6; r55 = 14 - 7 = 7; r65 = 14 - 14 = 0;

Результати обчислень оформимо у вигляді таблиці.

Ai	K1	K2	K3	K4	K5	макс

A1	2	6	7	4	7	7
A2	6	4	2	2	6	7
A3	6	5	1	3	9	9
A4	5	3	3	11	6	11
A5	3	0	0	0	7	7
A6	0	3	1	6	0	6

Вибираємо з (7; 6; 9; 11; 7; 6) мінімальний елемент min=6

Висновок: вибираємо стратегію А6.

Таким чином, у результаті вирішення статистичної гри за різними критеріями найчастіше рекомендувалася стратегія А5, тобто необхідно виробляти: 19 од товару 1, 22 одиниці товару 2, 22 одиниці товару 3 та 19 одиниць товару 4.

2. Торгова фірма розробила декілька варіантів плану продажів товарів на майбутній ярмарці з урахуванням кон'юнктури ринку попиту покупців. Отримані від можливих поєднань показники доходу представлені в таблиці. Визначити оптимальну стратегію фірми в продажі товарів на ярмарці.

Значення коефіцієнтів умови задачі.

План продажів	Величина доходу, гр.од.		
	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$П_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad П_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 27 \end{pmatrix}; \quad П_3 = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 19 \end{pmatrix}$$

№ варіанту Значення	4
a_{11}	4
a_{12}	3
a_{13}	5
a_{21}	6

a_{22}	2
a_{23}	3
a_{31}	2
a_{32}	5
a33	-2

Розв’язання:

План продажів	Величина доходу, гр.од.		
	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$
$П_1$	4	3	5
$П_2$	6	2	3
$П_3$	2	5	-2

Побудуємо матрицю прибутків з врахуванням плану продаж:

План продажів	прибуток		
	1	2	3
$П_1$	32*4 = 128	25*3 = 75	14*5 =70
$П_2$	18*6 = 108	30*2 = 60	27*3 = 81
$П_3$	24*2 = 48	33*5 = 165	-2*19 = -38

Для визначення оптимальної стратегії використаємо декілька критеріїв:

Критерій максимаксу орієнтує статистику найсприятливіші стану природи, тобто. цей критерій висловлює оптимістичну оцінку ситуації.

max(aij) = 128; 108; 165

Вибираємо із (128; 108; 165) максимальний елемент max=165

Висновок: вибираємо стратегію П3.

Критерій Лапласа.

Якщо ймовірності станів природи правдоподібні, для їхньої оцінки використовують принцип недостатньої основи Лапласа, згідно з яким усі стани природи вважаються рівноймовірними, тобто:

q1 = q2 = ... = qn = 1/n.

qi = 1/3

Ai	П1	П2	П3	∑(aij)
A1	42.667	25	23.333	91

A2	36	20	27	83
A3	16	55	-12.667	58.333
pj	0.333	0.333	0.333	

Вибираємо із (91; 83; 58.33) максимальний елемент max=91

Висновок: вибираємо стратегію П1.

Критерій Вальд.

За критерієм Вальда за оптимальну приймається чиста стратегія, що у найгірших умовах гарантує максимальний виграш, тобто.

a = max(min aij)

Критерій Вальда орієнтує статистику на несприятливі стану природи, тобто. цей критерій висловлює песимістичну оцінку ситуації.

min(aij)= 70; 60;-38

Вибираємо із (70; 60; -38) максимальний елемент max=70

Висновок: вибираємо стратегію П1.

Критерій Севіджа.

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати ролі оптимальної стратегії ту, коли він величина максимального ризику мінімізується в найгірших умовах, тобто. забезпечується:

a = min(max rij)

Критерій Севіджа орієнтує статистику найнесприятливіші стану природи, тобто. цей критерій висловлює песимістичну оцінку ситуації.

Знаходимо матрицю ризиків.

Ризик – міра невідповідності між різними можливими результатами ухвалення певних стратегій. Максимальний виграш у j-му стовпці bj = max(aij) характеризує сприятливість стану природи.

1. Розраховуємо 1-й стовпець матриці ризиків.

r11 = 128 – 128 = 0; r21 = 128 - 108 = 20; r31 = 128 - 48 = 80;

2. Розраховуємо 2-й стовпець матриці ризиків.

r12 = 165 - 75 = 90; r22 = 165 - 60 = 105; r32 = 165 - 165 = 0;

3. Розраховуємо 3 стовпець матриці ризиків.

r13 = 81 - 70 = 11; r23 = 81 - 81 = 0; r33 = 81 - (-38) = 119;

Результати обчислень оформимо у вигляді таблиці.

Ai	П1	П2	П3	max(aij)
A1	0	90	11	90
A2	20	105	0	105
A3	80	0	119	119

Вибираємо з (90; 105; 119) мінімальний елемент min=90

Висновок: вибираємо стратегію П1.

Таким чином, у результаті вирішення статистичної гри за різними критеріями найчастіше рекомендувалася стратегія П1.

3.Фірма виробляє дитячі плаття і костюми, які користуються попитом та їх реалізація залежить від умов погоди. Витрати фірми на протязі квітня—травня на одиницю продукції складають: плаття – ***A*** гр.од., костюми – ***B*** гр.од. Ціна реалізації складає ***C*** гр.од і ***D*** гр.од відповідно.

За даними спостережень за декілька попередніх років, фірма може реалізувати в умовах теплої погоди ***E*** шт. платтів і ***K*** шт. костюмів, при прохолодній погоді – ***M*** шт. платтів ***N*** шт. костюмів.

В зв'язку з можливими змінами погоди визначити стратегію фірми по випуску продукції, яка забезпечить їй максимальний дохід.

Значення коефіцієнтів в умові задачі.

№Варіанта значення	4
A	12
B	40
C	22
D	95
E	1430
K	510
M	460
N	920
a	0,7

Розв'язання:

Фірма виробляє дитячі плаття і костюми, які користуються попитом та їх реалізація залежить від умов погоди. Витрати фірми на протязі квітня— травня на одиницю продукції складають: плаття – ***12*** гр.од., костюми – ***40*** гр.од. Ціна реалізації складає ***22*** гр.од і ***95*** гр.од відповідно.

За даними спостережень за декілька попередніх років, фірма може реалізувати в умовах теплої погоди ***1430*** шт. платтів і ***510*** шт. костюмів, при прохолодній погоді – ***460*** шт. платтів ***920*** шт. костюмів.

Оскільки прибуток фірми це різниця між витратами та доходами, то

Прибуток від реалізації плаття = 22-12 = 10 гр.од

Прибуток від реалізації костюма = 95 - 40 = 55 гр.од

Складемо матрицю прибутків:

	Тепла погода	Прохолодна погода
плаття	1430*10 = 14300	460*10 = 4600
костюми	510*55 = 28050	920*55 = 50600

Оскільки нам відомий показник песимізму a = 0,7 використаємо критерій Гурвіца.

s_1 = 0.7*4600+(1-0.7)*14300 = 7510

s_2 = 0.7*28050+(1-0.7)*50600 = 34815

Ai	Тепла погода П1	Прохолодна погода П2	min(aij)	max(aij)	y min(aij) + (1-y)max(aij)
плаття	14300	4600	4600	14300	7510
костюми	28050	50600	28050	50600	34815

Вибираємо з (7510; 34815) максимальный элемент max = 34815.

Підприємство має вибрати стратегію виробництва костюмі

Завдання 4. Нелінійне програмування

Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точку умовного екстремуму наступних функцій:

1.	$L = 2x_1x_3 - x_2x_3$ при обмеженнях: $$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$
2.	$L = x_1x_2 + x_2x_3$, при обмеженнях: $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$
3.	$L = x_1x_2 + x_2x_3$ при обмеженнях: $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$
4.	$L = 2x_1 - x_2 + x_3$ при обмеженнях: $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Розв'язання:
1.

Знайдемо екстремум функції F(X) = 2x1x3 - x2x3, використовуючи функцію Лагранжа.

Перепишемо обмеження завдання у неявному вигляді:

φ1(X) = x2 + 2x3-3 = 0

$\varphi 2(X) = x1 + x2 - 2 = 0$

Складемо допоміжну функцію Лагранжа:

$L(X, \lambda) = 2*x1*x3-x2*x3 + \lambda1*(x2+2*x3-3) + \lambda2*(x1+x2-2)$

Необхідною умовою екстремуму функції Лагранжа є рівність нулю її похідних по змінних xi і невизначеним множникам λ.

Складемо систему:

$\partial L/\partial x1 = 2*x3+\lambda2 = 0$

$\partial L/\partial x2 = -x3+\lambda1+\lambda2 = 0$

$\partial L/\partial x3 = 2*x1-x2+2*\lambda1 = 0$

$\partial L/\partial \lambda1 = x2+2*x3-3 = 0$

$\partial L/\partial \lambda2 = x1+x2-2 = 0$

Вирішивши цю систему, отримуємо стаціонарні точки умовного екстремуму X0.

$X0 = (-0.1667; 2.1667; 0.4167)$

$\lambda1 = 1.25$

$\lambda2 = -0.8333$

2. Перепишемо обмеження завдання у неявному вигляді:

$\varphi 1(X) = x1+x2-2 = 0$

$\varphi 2(X) = x2+x3-2 = 0$

Складемо допоміжну функцію Лагранжа:

$L(X, \lambda) = x1*x2+x2*x3 + \lambda1*(x1+x2 - 2) + \lambda2*(x2 + x3 - 2)$

Необхідною умовою екстремуму функції Лагранжа є рівність нулю її похідних по змінних xi і невизначеним множникам λ.

Складемо систему:

$\partial L/\partial x1 = x2+\lambda1 = 0$

$\partial L/\partial x2 = x1+x3+\lambda1+\lambda2 = 0$

$\partial L/\partial x3 = x2+\lambda 2 = 0$

$\partial L/\partial \lambda 1 = x1+x2-2 = 0$

$\partial L/\partial \lambda 2 = x2+x3-2 = 0$

Вирішивши цю систему, отримуємо точку умовного екстремуму X0.

X0=(1; 1; 1)

$\lambda 1 = -1$

$\lambda 2 = -1$

3. Перепишемо обмеження завдання у неявному вигляді:

$\varphi 1(X) = x1-x2-2 = 0$

$\varphi 2(X) = x2+x3-4 = 0$

Складемо допоміжну функцію Лагранжа:

$L(X, \lambda) = x1*x2+x2*x3 + \lambda 1*(x1-x2-2) + \lambda 2*(x2+x3-4)$

Необхідною умовою екстремуму функції Лагранжа є рівність нулю її похідних по змінних xi і невизначеним множникам λ.

Складемо систему:

$\partial L/\partial x1 = x2+\lambda 1 = 0$

$\partial L/\partial x2 = x1+x3-\lambda 1+\lambda 2 = 0$

$\partial L/\partial x3 = x2+\lambda 2 = 0$

$\partial L/\partial \lambda 1 = x1-x2-2 = 0$

$\partial L/\partial \lambda 2 = x2+x3-4 = 0$

Вирішивши цю систему, отримуємо точку умовного екстремуму X0.

X0 = (0; 0; 0)

4. Перепишемо обмеження завдання у неявному вигляді:

$\varphi 1(X) = x12+x22+x32-1 = 0$

Складемо допоміжну функцію Лагранжа:

$L(X, \lambda) = 2*x1-x2+x3 + \lambda*(x12+x22+x32-1)$

Необхідною умовою екстремуму функції Лагранжа є рівність нулю її похідних по змінних xi і невизначеним множникам λ.

Складемо систему:

$\partial L/\partial x1 = 2*x1*\lambda+2 = 0$

$\partial L/\partial x2 = 2*x2*\lambda-1 = 0$

$\partial L/\partial x3 = 2*x3*\lambda+1 = 0$

$\partial L/\partial \lambda = x12+x22+x32-1 = 0$

Вирішивши цю систему, отримуємо точку умовного екстремуму X0.

Завдання 5. Виробнича функція

Розглянемо **діяльність** деякого підприємства по випуску одного виду продукції за **14** попередніх періодів. Випуск даної продукції був можливий завдяки витратам на фактори виробництва. Виділимо два основних фактори виробництва - капітал (K) та працю (L) і пронаналізуємо залежність результуючого фактору від витрат на капітал та працю.

Вихідні дані задані в таблиці:

Варіант 4		
Y	K	L
54	324	340
58	377	341
55	330	346
53	347	292
55	338	339
59	396	338
58	381	325
55	390	262
54	365	277
55	334	340

Побудувати виробничу функцію за звітними статистичними даними діяльності підприємства.

1. Знайдемо такий розподіл заданого бюджету підприємства на наступний цикл за факторами виробництва при якому результуючий фактор досягне максимального **(max)** значення.

Примітка: Відомо, що бюджет підприємства на наступний період виробництва на 10% більше, ніж в останньому циклі виробництва.

2. Знайти мінімально-необхідний **(min)** бюджет підприємства, який при умові його оптимального розподілу за ресурсами дозволить досягти заданого результуючого фактору.

Примітка: Відомо, що на майбутній цикл виробництва результуючий фактор задається на 10% більше ніж було досягнуто попередньому.

3. Знайти обсяг інвестицій, який дозволить збільшити максимальний результуючий фактор в 1,25 разів.

Примітка: В розрахунках виходити з обсягу бюджету, який було використано в останньому періоді.

4. Визначити: середню та граничну фондовіддачу, середню та граничну продуктивність праці, еластичність. Порівняти показники та зробити економічний висновок по кожному.

Розв'язання:

Виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд: $Y= A*L^{a1}K^{a2}$

Для регресійного аналізу необхідно звести модель до лінійного виду. Перетворення проведемо через логарифмування. Отримаємо модель залежності обсягу випуску від вартості основних фондів та витрат на оплату праці:

$$Ln(Y) = Ln(A) + a_1Ln(K) + a_2Ln(L)$$

Позначимо через:

$$Ln(Y) = Y^* \quad Ln(A) = A^* \quad Ln(K) = K^* \quad Ln(L) = L^*$$

Регресійна модель прийме вигляд:

$$Y^*= A^* + a_1K^* + a_2L^*$$

Вихідні дані для розрахунків

Y	K	L	lnY	lnK	lnL
54	324	340	3,99	5,78	5,83
58	377	341	4,06	5,93	5,83
55	330	346	4,01	5,80	5,85
53	347	292	3,97	5,85	5,68
55	338	339	4,01	5,82	5,83
59	396	338	4,08	5,98	5,82
58	381	325	4,06	5,94	5,78
55	390	262	4,01	5,97	5,57
54	365	277	3,99	5,90	5,62
55	334	340	4,01	5,81	5,83

Визначимо параметри моделі. Для цього проведем регресійний аналіз в табличному процесорі MS Excel за допомогою функції «Регресія». На вкладці «Дані» вибираємо пункт Аналіз даних. В діалоговому вікні вибираєм функцію «Регресія»:

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,991298
R-квадрат	0,982671
Нормированный R-кв	0,97772
Стандартная ошибка	0,00535
Наблюдения	10

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*
Регрессия	2	0,011361	0,00568	198,4757	6,85E-07
Остаток	7	0,0002	2,86E-05		
Итого	9	0,011561			

	Коэффициен	*артная о*	*татисти*	*-Значени*	*ижние 95*	*ерхние 95*	*ижние 95,0*	*рхние 95,0%*
Y-пересечение	-0,39697	0,221829	-1,78952	0,116659	-0,92151	0,127575	-0,92151	0,127575
Переменная X 1	0,473269	0,026083	18,1444	3,82E-07	0,411592	0,534947	0,411592	0,534947
Переменная X 2	0,283218	0,019135	14,80082	1,54E-06	0,23797	0,328465	0,23797	0,328465

$Ln(A) = A^*$

$A = e^{-0,397} = 0,672$

Виробнича функція матиме вигляд: $Y = 0,672 * L^{0,283} K^{0,473}$

1. Знайдемо такий розподіл заданого бюджету підприємства на наступний цикл за факторами виробництва при якому результуючий фактор досягне максимального (max) значення.

Примітка: Відомо, що бюджет підприємства на наступний період виробництва на 10% більше, ніж в останньому циклі виробництва.

	Y	K	L	Y*
1	54	324	340	53,85990666
2	58	377	341	57,90928742
3	55	330	346	54,59902691
4	53	347	292	53,29033638
5	55	338	339	54,90266008
6	59	396	338	59,12382491
7	58	381	325	57,4129388
8	55	390	262	54,61627765
9	54	365	277	53,77192356
10	55	334	340	54,63989868
Максим.				59,12
Мінім.				53,29

Результуючий показник досягне максимуму при витраті бюджету на капітал 396 од, на працю 338 од.

Знайлемо мінімально-необхідний **(min)** бюджет підприємства, який при умові його оптимального розподілу за ресурсами дозволить досягти заданого результуючого фактору.

Результуючий показник досягне мінімуму при витраті бюджету на капітал 347 од, на працю 292 од.

Знайдемо обсяг інвестицій, який дозволить збільшити максимальний результуючий фактор в 1,25 разів.

Примітка: В розрахунках виходити з обсягу бюджету, який було використано в останньому періоді.

Щоб збільшити максимальний результат у 1,25 раз, тобто досягти рівня 59,12*1,25 = 73,9 од., необхідні інвестиції в розмірі 73,9 - 54,63 = 19,26 од

Визначимо:

середню та граничну фондовіддачу

Середня фондовіддача (μ_K):

$$\mu_K = \frac{Y}{K} = \frac{AK^{a_1}L^{a_2}}{K} = AK^{a_1-1}L^{a_2}$$

Граничну фондовіддачу (ефективність використання капіталу) визначаємо за формулою:

$$v_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = Aa_1K^{a_1-1}L^{a_2}$$

середню та граничнупродуктивність праці

Середню продуктивність праці (μ_L) розрахуємо за формулою:

$$\mu_L = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{a_1}L^{a_2}}{L} = AK^{a_1}L^{a_2-1}$$

Граничну продуктивність праці (v_L) визначаємо за формулою:

$$v_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = Aa_2K^{a_1}L^{a_2-1}$$

Еластичність:

$$\gamma_{KL} = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} \qquad \text{або} \qquad \gamma_{KL} = \frac{a_0 a_2 L^{a_2-1} K^{a_1}}{a_0 a_1 L^{a_2} K^{a_1-1}} = \frac{a_2 K}{a_1 L}$$

Розрахунок проведемо в MS Excel

Y теор	K	L	μ_K	v_K	μ_L	v_L	γ_{KL}
53,85991	324	340	0,166	-0,066	0,158	0,045	0,57
57,90929	377	341	0,154	-0,061	0,170	0,048	0,66
54,59903	330	346	0,165	-0,066	0,158	0,045	0,57
53,29034	347	292	0,154	-0,061	0,183	0,052	0,71
54,90266	338	339	0,162	-0,064	0,162	0,046	0,60
59,12382	396	338	0,149	-0,059	0,175	0,050	0,70
57,41294	381	325	0,151	-0,060	0,177	0,050	0,70
54,61628	390	262	0,140	-0,056	0,208	0,059	0,89
53,77192	365	277	0,147	-0,058	0,194	0,055	0,79
54,6399	334	340	0,164	-0,065	0,161	0,045	0,59

Фондовіддача капіталу показує скільки продукції виробляється з 1 одиниці капіталу. Гранична фондовіддача капіталу показує скільки основних фондів витрачається на виробництво 1 одиниці продукції. Отримані результати говорять, що при зростанні обсягу виробництва підприємства більш ніж 58 од., фондовіддача знижується.

Ефективність використання праці показує скільки продукції виробляється при використанні 1 одиниці праці. Так, при зростанні обсягу виробництва підприємства більш ніж 54 од., продуктивність праці співробітників зростає.

Для визначення можливих варіантів використання праці та капіталу та можливості заміни один одного визначають еластичність. Так, простежуємо, що при зростанні обсягу використання одного фактора, обсяг використання іншого скорочується. Так, при зменшені витрат праці на одну одиницю для збереження заданого обсягу виробництва продукції витрати капіталу потрібно зменшити.