f (x, y, z, t) = 1 на наборах 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 15;

1. Побудувати таблицю істинності функції.

Розв’язання:

Побудуємо таблицю істинності

Номер набору	x	y	z	t	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

2. Побудувати ДДНФ та ДКНФ

Для побудови ДДНФ для кожного набору змінних, при яких функція набуває значення 1, запишемо добуток, причому змінні, які мають значення 0, візьмемо з запереченням. Маємо ДДНФ:

$$\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}\wedge t\right)\vee\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge t\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge\bar{t}\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}\wedge\bar{t}\right)\vee$$
$$\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{t}\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z\wedge t\right)$$

Для побудови ДКНФ для кожного набору змінних, при яких функція набуває значення 0, запишемо суму, причому змінні, які мають значення 1, візьмемо з запереченням. Маємо ДКНФ:

$$\left(x\vee y\vee z\vee t\right)\wedge\left(x\vee y\vee \overline{z}\vee t\right)\wedge\left(x\vee \overline{y}\vee z\vee t\right)\wedge\left(x\vee \overline{y}\vee z\vee \overline{t}\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}\vee \overline{t}\right)$$
$$\wedge\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z\vee t\right)\wedge\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z\vee \overline{t}\right)\wedge\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee \overline{z}\vee t\right)$$

3. Знайти МДНФ та МКНФ методом карт Карно.

Розв’язання:

Знайдемо МДНФ функції за допомогою карт Карно. Складемо карту Карно для даної функції:

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Покриємо одиниці карти прямокутниками, довжини сторін яких є степенями числа 2:

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Кон’юнкт $x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}$

xy	zt	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Кон'юнкт $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge t$

xy	zt	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Кон'юнкт $\overline{x} \wedge y \wedge z$

xy	zt	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Кон'юнкт $y \wedge z \wedge t$

xy	zt	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Кон’юнкт $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{t}$

Таким чином, МДНФ має вигляд

$$\left(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\right) \vee \left(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge t\right) \vee \left(\overline{x} \wedge y \wedge z\right) \vee \left(y \wedge z \wedge t\right) \vee \left(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{t}\right)$$

Аналогічно знайдемо МКНФ. Покриємо нулі карти прямокутниками:

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Диз’юнкт $\overline{y} \vee z$

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Диз’юнкт $x \vee y \vee t$

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Диз’юнкт $\overline{x} \vee \overline{y} \vee t$

xy	*zt*	00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	0	1	1
11		0	0	1	0
10		1	1	0	1

Диз'юнкт $\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}$

Таким чином, МКНФ має вигляд

$$\left(\bar{y} \vee z\right) \wedge \left(x \vee y \vee t\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee t\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}\right)$$

4. Знайти СДНФ

4.1 Методом Нельсона

Розв'язання:

Знайдемо скорочену ДНФ методом Нельсона. Візьмемо довільну КНФ (в якості такої виберемо знайдену МКНФ), розкриємо дужки та проведемо всі поглинання:

$$\left(\bar{y}\vee z\right)\wedge\left(x\vee y\vee t\right)\wedge\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee t\right)\wedge\left(\bar{x}\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t}\right)=$$

$$=\left(\bar{y}x\vee zx\vee\bar{y}y\vee zy\vee\bar{y}t\vee zt\right)\left(\bar{x}\bar{x}\vee\bar{y}\bar{x}\vee t\bar{x}\vee\bar{x}y\vee\bar{y}y\vee ty\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}\vee t\bar{z}\vee\bar{x}\bar{t}\vee\bar{y}\bar{t}\vee t\bar{t}\right)=$$

$$=\left(\bar{y}x\vee zx\vee 0\vee zy\vee\bar{y}t\vee zt\right)\left(\bar{x}\vee\bar{y}\bar{x}\vee t\bar{x}\vee\bar{x}y\vee 0\vee ty\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}\vee t\bar{z}\vee\bar{x}\bar{t}\vee\bar{y}\bar{t}\vee 0\right)=$$

$$=\left(\bar{y}x\vee zx\vee zy\vee\bar{y}t\vee zt\right)\left(\bar{x}\vee\bar{y}\bar{x}\vee t\bar{x}\vee\bar{x}y\vee ty\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}\vee t\bar{z}\vee\bar{x}\bar{t}\vee\bar{y}\bar{t}\right)=$$

$$=\bar{y}x\bar{x}\vee zx\bar{x}\vee zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee\bar{y}x\bar{y}\bar{x}\vee zx\bar{y}\bar{x}\vee zy\bar{y}\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{y}\bar{x}\vee zt\bar{y}\bar{x}\vee$$

$$\vee\bar{y}xt\bar{x}\vee zxt\bar{x}\vee zyt\bar{x}\vee\bar{y}tt\bar{x}\vee ztt\bar{x}\vee\bar{y}x\bar{x}y\vee zx\bar{x}y\vee zy\bar{x}y\vee\bar{y}t\bar{x}y\vee zt\bar{x}y\vee$$

$$\vee\bar{y}xty\vee zxty\vee zyty\vee\bar{y}tty\vee ztty\vee\bar{y}x\bar{x}\bar{z}\vee zx\bar{x}\bar{z}\vee zy\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{z}\vee zt\bar{x}\bar{z}\vee$$

$$\vee\bar{y}x\bar{y}\bar{z}\vee zx\bar{y}\bar{z}\vee zy\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}t\bar{y}\bar{z}\vee zt\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}xt\bar{z}\vee zxt\bar{z}\vee zyt\bar{z}\vee\bar{y}tt\bar{z}\vee ztt\bar{z}\vee$$

$$\vee\bar{y}x\bar{x}\bar{t}\vee zx\bar{x}\bar{t}\vee zy\bar{x}\bar{t}\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{t}\vee zt\bar{x}\bar{t}\vee\bar{y}x\bar{y}\bar{t}\vee zx\bar{y}\bar{t}\vee zy\bar{y}\bar{t}\vee\bar{y}t\bar{y}\bar{t}\vee zt\bar{y}\bar{t}=$$

$$=0\vee 0\vee zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee 0\vee 0\vee 0\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{y}\bar{x}\vee$$

$$\vee 0\vee 0\vee zyt\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee 0\vee 0\vee zy\bar{x}\vee 0\vee zt\bar{x}y\vee$$

$$\vee 0\vee zxty\vee zyt\vee 0\vee zty\vee 0\vee 0\vee 0\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{z}\vee 0\vee$$

$$\vee x\bar{y}\bar{z}\vee 0\vee 0\vee t\bar{y}\bar{z}\vee 0\vee\bar{y}xt\bar{z}\vee 0\vee 0\vee\bar{y}t\bar{z}\vee 0\vee$$

$$\vee 0\vee 0\vee zy\bar{x}\bar{t}\vee 0\vee 0\vee x\bar{y}\bar{t}\vee zx\bar{y}\bar{t}\vee 0\vee 0\vee 0=$$

$$=zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{y}\bar{x}\vee zyt\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee zy\bar{x}\vee zt\bar{x}y\vee zxty\vee zyt\vee zty\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{z}\vee$$

$$\vee x\bar{y}\bar{z}\vee t\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}xt\bar{z}\vee\bar{y}t\bar{z}\vee zy\bar{x}\bar{t}\vee x\bar{y}\bar{t}\vee zx\bar{y}\bar{t}=$$

$$=zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{x}\vee zt\bar{y}\bar{x}\vee zyt\bar{x}\vee zxty\vee zyt\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{z}\vee$$

$$\vee x\bar{y}\bar{z}\vee t\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}xt\bar{z}\vee zy\bar{x}\bar{t}\vee x\bar{y}\bar{t}\vee zx\bar{y}\bar{t}=$$

$$=\left(zy\bar{x}\vee zyt\bar{x}\vee zy\bar{x}\bar{t}\right)\vee\left(\bar{y}t\bar{x}\vee zt\bar{y}\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\bar{z}\right)\vee\left(x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}xt\bar{z}\right)\vee\left(x\bar{y}\bar{t}\vee zx\bar{y}\bar{t}\right)\vee\left(zyt\vee zxty\right)\vee$$

$$\vee zt\bar{x}\vee t\bar{y}\bar{z}=$$

$$=zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{t}\vee zyt\vee zt\bar{x}\vee t\bar{y}\bar{z}$$

Таким чином, отримали СДНФ:

$$zy\bar{x}\vee\bar{y}t\bar{x}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{t}\vee zyt\vee zt\bar{x}\vee t\bar{y}\bar{z}$$

4.2 Методом Квайна

Розв’язання:

Побудуємо скорочену ДНФ методом Кайна.

Для цього візьмемо ДДНФ функції:

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z}t\vee\bar{x}\bar{y}zt\vee\bar{x}yz\bar{t}\vee\bar{x}yzt\vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}\bar{z}t\vee x\bar{y}z\bar{t}\vee xyzt$$

Проведемо склеювання конституент одиниці:

1-2: $\bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt = \bar{x}\bar{y}t$

3-4: $\bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}yzt = \bar{x}yz$

5-6: $x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t = x\bar{y}\bar{z}$

5-7: $x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} = x\bar{y}\bar{t}$

4-8: $\bar{x}yzt \vee xyzt = yzt$

1-5: $\bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} = \bar{y}\bar{z}\bar{t}$

2-4: $\bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt = \bar{x}zt$

Маємо ДНФ:

$$\bar{x}\bar{y}t \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{t} \vee yzt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}zt$$

Подальше склеювання неможливе, тому отримали СДНФ.

4.3 Методом Мак-Класкі

Розв’язання:

Запишемо комбінації, при яких значення функції становить «1»: 0000, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1010, 1011, 1111.

Запишемо дані терми по групах:

Кількість «1»	Комбінація	№ імпліканти
1	0001 1000	m1 m8
2	0011 0110 1001 1010	m3 m6 m9 m10
3	0111	m7
4	1111	m15

Виконаємо неповні склювання:

Кількість «1»		Мінтерми	імпліканти 1 рівня	імпліканти 2 рівня
1	m1 m8	0001 1000	m(1,3) 00-1* m(1,9) -001* m(8,9) 100-* m(8,10) 10-0*	-
2	m3 m6 m9 m10	0011 0110 1001 1010	m(3,7) 0-11* m(6,7) 011-*	-
3	m7	0111	m(7,15) -111*	
4	m15	1111		

Таким чином, відповідна СДНФ має вигляд

$$\bar{x}\bar{y}t \vee \bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yz \vee yzt$$

5. Знайти всі тупикові форми та обрати серед них МДНФ за допомогою імплікатної таблиці та методу Петрика

Розв’язання:

Відповідно до отриманих результатів, побудуємо імплікатну талицю:

	$\bar x\wedge\bar y\wedge\bar z\wedge t$	$\bar x\wedge\bar y\wedge z\wedge t$	$\bar x\wedge y\wedge z\wedge\bar t$	$\bar x\wedge y\wedge z\wedge t$	$x\wedge\bar y\wedge\bar z\wedge\bar t$	$x\wedge\bar y\wedge\bar z\wedge t$	$x\wedge\bar y\wedge z\wedge\bar t$	$x\wedge y\wedge z\wedge t$
$\bar x\bar y t$	×	×						
$\bar y\bar z t$	×					×		
$x\bar y\bar z$					×	×		
$x\bar y\bar t$ *					×		×	
$\bar x z t$		×		×				
$\bar x y z$ *			×	×				
yzt *				×				×
			*	+	+		*	*

Знаком «×» відмітимо клітинки, що покривають одиниці даної функції. Внизу таблиці символом «*» відзначаємо ті стовпці, в яких стоїть тільки один хрестик, відповідні їм імпліканти також відзначаємо символом «*» – вони є обов'язковими. Відзначаємо також символом «+» ті стовпці, які покриваються обов'язковими імплікантами. Якщо всі стовпчики відзначені, то отриманий набір обов'язкових імплікант становить мінімальну ДНФ. Якщо частина стовпців залишається непокритою, з решти імплікант вибирається найменше число найбільш коротких імплікант так, щоб всі стовпці були покриті.

Таким чином, МДНФ має вигляд

$$x\bar y\bar t \vee \bar x yz \vee yzt \vee \bar x\bar y t \vee \bar y\bar z t$$

Використаємо метод Петрика

Позначимо

$$A = \bar x\bar y t$$
$$B = \bar y\bar z t$$
$$C = x\bar y\bar z$$
$$D = x\bar y\bar t$$
$$E = \bar x z t$$
$$F = \bar x y z$$
$$G = yzt$$

Тоді кон’юнктивне представлення даної матриці має вигляд

$$\left(A\vee B\right)\left(A\vee E\right)F\left(E\vee F\vee G\right)\left(C\vee D\right)\left(B\vee C\right)EG$$

Спростимо отриманий вираз

$$(A \vee B)(A \vee E)F(E \vee F \vee G)(C \vee D)(B \vee C)EG =$$
$$= (A \vee B)E(A \vee E)F(C \vee D)(B \vee C)G = (A \vee B)EF(C \vee D)(B \vee C)G =$$
$$= (A \vee B)(C \vee D)(B \vee C)EFG = \big(A(B \vee C) \vee B(B \vee C)\big)(C \vee D)EFG =$$
$$= \big(A(B \vee C) \vee B\big)(C \vee D)EFG = \big(A(B \vee C)C \vee BC \vee DA(B \vee C) \vee BD\big)EFG =$$
$$= (AC \vee BC \vee DAB \vee DAC \vee BD)EFG = (AC \vee BC \vee BD)EFG =$$
$$= ACEFG \vee BCEFG \vee BDEFG$$

Таким чином, маємо три тупикові форми

$$\bar{x}\bar{y}t \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yz \vee yzt$$

$$\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yz \vee yzt$$

$$\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yz \vee yzt$$

Кожна тупикова форма має однакову кількість кон'юнктів однакової довжини, тому кожна з них може бути вибрана в якості МДНФ.

6. Записати диз'юнктивне розкладання функції (функція у вигляді МДНФ)
6.1 За змінною z

Розв'язання:

Запишемо диз'юнктивне розкладання функції за змінною z. За теоремою про диз'юнктивне розкладання, маємо:

$$f(x,y,z,t) = \underset{\sigma}{\vee} z^{\sigma} \wedge f(x,y,\sigma,t) = \bar{z} \wedge f(x,y,0,t) \vee z \wedge f(x,y,1,t)$$

Знайдемо

$$f(x,y,0,t) = \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{0}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t\right) \vee \left(\bar{x} \wedge y \wedge 0\right) \vee (y \wedge 0 \wedge t) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t}\right) =$$
$$= \left(x \wedge \bar{y}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t\right) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t}\right)$$

$$f(x,y,1,t) = \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{1}\right) \vee \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t\right) \vee \left(\bar{x} \wedge y \wedge 1\right) \vee (y \wedge 1 \wedge t) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t}\right) =$$
$$= \left(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t\right) \vee \left(\bar{x} \wedge y\right) \vee (y \wedge t) \vee \left(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t}\right)$$

Тоді

$$f\left(x,y,z,t\right)=\bar{z}\wedge\left(\left(x\wedge\bar{y}\right)\vee\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{t}\right)\right)\vee$$
$$\vee z\wedge\left(\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\right)\vee\left(y\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{t}\right)\right)$$

Відповідь:
$$f\left(x,y,z,t\right)=\bar{z}\wedge\left(\left(x\wedge\bar{y}\right)\vee\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{t}\right)\right)\vee$$
$$\vee z\wedge\left(\left(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\right)\vee\left(y\wedge t\right)\vee\left(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{t}\right)\right)$$

6.2 За змінними x, y

Розв'язання:

За теоремою про диз'юнктивне розкладання, маємо:

$$f\left(x,y,z,t\right)=\underset{(\sigma_1,\sigma_2)}{\vee}x^{\sigma_1}\wedge y^{\sigma_2}\wedge f\left(\sigma_1,\sigma_2,z,t\right)=$$
$$=\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge f\left(0,0,z,t\right)\vee\bar{x}\wedge y\wedge f\left(0,1,z,t\right)\vee x\wedge\bar{y}\wedge f\left(1,0,z,t\right)\vee x\wedge y\wedge f\left(1,1,z,t\right)$$

Знайдемо

$$f\left(0,0,z,t\right)=\left(0\wedge\bar{0}\wedge\bar{z}\right)\vee\left(\bar{0}\wedge\bar{0}\wedge t\right)\vee\left(\bar{0}\wedge 0\wedge z\right)\vee\left(0\wedge z\wedge t\right)\vee\left(0\wedge\bar{0}\wedge\bar{t}\right)=t$$
$$f\left(0,1,z,t\right)=\left(0\wedge\bar{1}\wedge\bar{z}\right)\vee\left(\bar{0}\wedge\bar{1}\wedge t\right)\vee\left(\bar{0}\wedge 1\wedge z\right)\vee\left(1\wedge z\wedge t\right)\vee\left(0\wedge\bar{1}\wedge\bar{t}\right)=z\vee\left(z\wedge t\right)$$
$$f\left(1,0,z,t\right)=\left(1\wedge\bar{0}\wedge\bar{z}\right)\vee\left(\bar{1}\wedge\bar{0}\wedge t\right)\vee\left(\bar{1}\wedge 0\wedge z\right)\vee\left(0\wedge z\wedge t\right)\vee\left(1\wedge\bar{0}\wedge\bar{t}\right)=\bar{z}\vee\bar{t}$$
$$f\left(1,1,z,t\right)=\left(1\wedge\bar{1}\wedge\bar{z}\right)\vee\left(\bar{1}\wedge\bar{1}\wedge t\right)\vee\left(\bar{1}\wedge 1\wedge z\right)\vee\left(1\wedge z\wedge t\right)\vee\left(1\wedge\bar{1}\wedge\bar{t}\right)=\left(z\wedge t\right)$$

Звідки

$$f\left(x,y,z,t\right)=\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\vee\bar{x}\wedge y\wedge\left(z\vee\left(z\wedge t\right)\right)\vee x\wedge\bar{y}\wedge\left(\bar{z}\vee\bar{t}\right)\vee x\wedge y\wedge\left(z\wedge t\right)$$

Відповідь:

$$f\left(x,y,z,t\right)=\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge t\vee\bar{x}\wedge y\wedge\left(z\vee\left(z\wedge t\right)\right)\vee x\wedge\bar{y}\wedge\left(\bar{z}\vee\bar{t}\right)\vee x\wedge y\wedge\left(z\wedge t\right)$$

7. Записати кон'юнктивне розкладання функції (функція у вигляді МДНФ)

7.1 За змінною z

Розв'язання:

Відповідно до теореми про кон'юнктивне розкладання, маємо:

$$f(x,y,z,t) = \underset{\sigma}{\wedge} z^{\bar{\sigma}} \vee f(x,y,\sigma,t) =$$
$$= (z \vee f(x,y,0,t)) \wedge (\bar{z} \vee f(x,y,1,t))$$

Раніше ми знайшли

$$f(x,y,0,t) = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})$$

$$f(x,y,1,t) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})$$

Тоді

$$f(x,y,z,t) = \left(z \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})\right)$$

Відповідь:

$$f(x,y,z,t) = \left(z \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{t})\right)$$

7.2 За змінними x, y

Розв’язання:

Відповідно до теореми про кон’юнктивне розкладання, маємо:

$$f(x,y,z,t) = \underset{\sigma_1,\sigma_4}{\wedge} x^{\bar{\sigma}_1} \vee y^{\bar{\sigma}_2} \vee f(\sigma_1,\sigma_2,z,t) =$$
$$= (x \vee y \vee f(0,0,z,t)) \wedge (\bar{x} \vee y \vee f(1,0,z,t))(x \vee \bar{y} \vee f(0,1,z,t)) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee f(1,1,z,t))$$

Раніше ми знайшли

$$f(0,0,z,t) = t$$
$$f(0,1,z,t) = z \vee (z \wedge t)$$
$$f(1,0,z,t) = \bar{z} \vee \bar{t}$$
$$f(1,1,z,t) = (z \wedge t)$$

Тоді

$$f\left(x,y,z,t\right)=\underset{\sigma_1,\sigma_4}{\wedge} x^{\overline{\sigma_1}} \vee y^{\overline{\sigma_2}} \vee f\left(\sigma_1,\sigma_2,z,t\right)=$$

$$=\left(x\vee y\vee t\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}\vee \overline{t}\right)\left(x\vee \overline{y}\vee z\vee\left(z\wedge t\right)\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee\left(z\wedge t\right)\right)$$

Відповідь:

$$f\left(x,y,z,t\right)=\left(x\vee y\vee t\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}\vee \overline{t}\right)\left(x\vee \overline{y}\vee z\vee\left(z\wedge t\right)\right)\wedge\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee\left(z\wedge t\right)\right)$$

8. Записати задану функцію у вигляді полінома Жегалкіна

Розв’язання:

Для побудови полінома Жегалкіна скористаємось методом невизначених коефіцієнтів. Будемо шукати у повному вигляді:

$$f(x,y,z,t)=a_0\oplus a_1x\oplus a_2y\oplus a_3z\oplus a_4t\oplus a_{12}xy\oplus a_{13}xz\oplus a_{23}yz\oplus a_{14}xt\oplus a_{24}yt\oplus$$

$$\oplus a_{34}zt\oplus a_{123}xyz\oplus a_{124}xyt\oplus a_{134}xzt\oplus a_{234}yzt\oplus a_{1234}xyzt$$

$f(0,0,0,0)=0 \Rightarrow a_0=0$

$f(0,0,0,1)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_4=1 \Rightarrow 0 \oplus a_4=1 \Rightarrow a_4=1$

$f(0,0,1,0)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_3=0 \Rightarrow 0 \oplus a_3=0 \Rightarrow a_3=0$

$f(0,0,1,1)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_{34}=1 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{34}=1 \Rightarrow 1 \oplus a_{34}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{34}=0$

$f(0,1,0,0)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_2=0 \Rightarrow 0 \oplus a_2=0 \Rightarrow a_2=0$

$f(0,1,0,1)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_{24}=0 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{24}=0 \Rightarrow 1 \oplus a_{24}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{24}=1$

$f(0,1,1,0)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23}=1 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}=1 \Rightarrow 0 \oplus a_{23}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{23}=1$

$f(0,1,1,1)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_{23} \oplus a_{24} \oplus a_{34} \oplus a_{234}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{234}=1 \Rightarrow 1 \oplus a_{234}=1 \Rightarrow a_{234}=0$

$f(1,0,0,0)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1=1 \Rightarrow 0 \oplus a_1=1 \Rightarrow a_1=1$

$f(1,0,0,1)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_4 \oplus a_{14}=1 \Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{14}=1 \Rightarrow 0 \oplus a_{14}=1 \Rightarrow a_{14}=1$

$f(1,0,1,0)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13}=1 \Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13}=1 \Rightarrow 1 \oplus a_{13}=1 \Rightarrow a_{13}=0$

$f(1,0,1,1)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{34} \oplus a_{134}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{134}=0 \Rightarrow 1 \oplus a_{134}=0 \Rightarrow a_{134}=1$

$f(1,1,0,0)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}=0 \Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12}=0 \Rightarrow 1 \oplus a_{12}=0 \Rightarrow a_{12}=1$

$f(1,1,0,1)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_{12} \oplus a_{14} \oplus a_{24} \oplus a_{124}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{124}=0 \Rightarrow 1 \oplus a_{124}=0 \Rightarrow a_{124}=1$

$f(1,1,1,0)=0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123}=0 \Rightarrow 1 \oplus a_{123}=0 \Rightarrow a_{123}=1$

$f(1,1,1,1)=1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{14} \oplus a_{24} \oplus$

$\oplus a_{34} \oplus a_{123} \oplus a_{124} \oplus a_{134} \oplus a_{234} \oplus a_{1234}=1 \Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus$

$\oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{1234}=1 \Rightarrow 1 \oplus a_{1234}=1 \Rightarrow a_{1234}=0$

Тоді поліном Жегалкіна має вигляд:

$f(x,y,z,t)=x \oplus t \oplus xy \oplus yz \oplus xt \oplus yt \oplus xyz \oplus xyt \oplus xzt$

9. Дослідити задану функцію на

9.1 Збереження 0 та 1

Розв’язання:

Оскільки $f(0,0,0,0)=0$, то функція зберігає константу 0.

Оскільки $f(1,1,1,1)=1$, то функція зберігає константу 1.

9.2 Монотонність

Розв’язання:

Оскільки $(1,0,1,0) \prec (1,0,1,1)$, але $f(1,0,1,0) = 1 > f(1,0,1,1) = 0$, то функція не монотонна.

9.3 Самодвоїстість

Розв’язання:

Функція буде самодвоїстою, якщо на протилежних наборах приймає протилежні значення. Оскільки

$f(0,0,1,0) = 0 = f(1,1,0,1)$, то функція не самодвоїста.

9.4 Лінійність.

Розв’язання:

Оскільки поліном Жегалкіна функції містить добутки (є нелінійним), то і функцій не лінійна.